

Scomposizione in Fatti semplici

Scopo

Nel caso di una funzione razionale fratta, propria e impropria, si utilizza la scomposizione in fatti semplici di modo che per antitrasformarla possiamo utilizzare le trasformate elementari invece che gli integrali di antitrasformazione.

Nel caso di funzioni razionali improprie otteniamo la (1) formale da un polinomio e da una funzione razionale propria scomponibile con le tecniche indicate di seguito.

$$F(m) = \frac{N(m)}{D(m)} \xrightarrow{\text{Propria}} \frac{N(m)}{D(m)} \xrightarrow{\text{Impropria}} P(m) + \frac{N'(m)}{D(m)}$$

Scomponibili

Direttamente antitrasformabile

Definizioni

m: Parametro che può rappresentare un valore complesso / frequenza

ZERI: Valori di m T.C. $N(m) = N'(m) = 0$

POLI: Valori di m T.C. $D(m) = 0$

Metodo di calcolo

Data una frazione $\frac{N(s)}{D(s)}$ scomporre in fatti semplici

Struttura generale

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A}{(s-a)} + \frac{B_1}{(s-b)} + \dots + \frac{B_n}{(s-b_n)^n} + \frac{C}{(s-c)} + \frac{C^*}{(s-c^*)}$$

I residui sono complessi e coniugati

RESIDUI

polo semplice singolo

poli semplici multipli

poli complessi

Uso del limite

E' un metodo di calcolo veloce, lo si può sempre usare e permette di calcolare i residui senza risolvere sistemi di equazioni lineari. Non funziona con poli multipli.

Esempio

$$F(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$$

$$\frac{3s+5}{(s+1)(s+2)} \cdot (s+1) = A + \frac{B(s+1)}{(s+2)}$$

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{3s+5}{(s+2)} = A + \lim_{s \rightarrow -1} \frac{B(s+1)}{(s+2)} = A \Rightarrow 2 = A$$

in modo analogo $B=1$.

USO DELLA DERIVATA

Quando il denominatore ha poli multipli allora si utilizza questo metodo. Sia

$$F(s) = \frac{A_1}{(s-a)} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s-a)^n} + \dots$$

↑
polinomio scomponibile con il metodo della derivata

↑
polinomio scomponibile con altri metodi

1° moltiplico per $(s-a)^n$

$$(s-a)^n F(s) = A(s-a)^{n-1} + A_2(s-a)^{n-2} + \dots + A_n + \text{altri termini}$$

2° utilizzo il metodo del limite

$$A_n = \lim_{s \rightarrow a} (s-a)^n F(s)$$

3° derivo entrambi i termini

$$A_{n-1} = \lim_{s \rightarrow a} \frac{d}{ds} [(s-a)^n F(s)]$$

4° continuo a derivare fino ad ottenere A_1 , ma in generale

$$A_k = \lim_{s \rightarrow a} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} [(s-a)^n F(s)]$$

ESEMPIO

$$F(s) = \frac{(3s+5)}{(s+1)^2(s+2)}$$

scompongo

$$\frac{(3s+5)}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+2)}$$

ricerca di A_1

$$(s+1)^2 \frac{(3s+5)}{(s+1)^2(s+2)} = A_1(s+1) + A_2 + A_3 \frac{(s+1)^2}{(s+2)}$$

$$\frac{(3s+5)}{(s+2)} = A_1(s+1) + A_2 + A_3 \frac{(s+1)^2}{(s+2)}$$

$$\frac{d}{ds} \frac{(3s+5)}{(s+2)} = \frac{d}{ds} \left[A_1(s+1) + A_3 \frac{(s+1)^2}{(s+2)} \right]$$

$$\frac{1}{(s+2)^2} = A_1 + \frac{d}{ds} \left[A_3 \frac{(s+1)^2}{(s+2)} \right]$$

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{(s+2)^2} = A_1 = 1 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{non calcolo la derivata tanto} \\ \rightarrow 0 \text{ per } s \rightarrow -1 \end{matrix}$$

Nell'esempio sopra i termini A_2, A_3 utilizzo il metodo dei limiti

Esercizio Riapitolativo

TESTO

Scomporre in fratti semplici: $F(s) = \frac{4s^2 + 3s + 2}{(s+1)^3 (s+2)}$

$$\frac{4s^2 + 3s + 2}{(s+1)^3 (s+2)} = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3} + \frac{A_4}{(s+2)}$$

CALCOLO A_4

$$(s+2) \frac{4s^2 + 3s + 2}{(s+1)^3 (s+2)} = A_1 \frac{(s+2)}{(s+1)} + A_2 \frac{(s+2)}{(s+1)^2} + A_3 \frac{(s+2)}{(s+1)^3} + A_4$$

$$\lim_{s \rightarrow -2} \frac{4s^2 + 3s + 2}{(s+1)^3} = A_4$$

$$A_4 = \frac{16 - 6 + 2}{-1} = -12$$

CALCOLO A_3

$$(s+1)^3 \frac{4s^2 + 3s + 2}{(s+1)^3 (s+2)} = A_1 (s+1)^2 + A_2 (s+1) + A_3 + A_4 \frac{(s+1)^3}{(s+2)}$$

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{4s^2 + 3s + 2}{s+2} = A_3 \quad \text{tutto il resto} \rightarrow 0 \text{ quando } s \rightarrow -1$$

$$A_3 = -9$$

CALCOLO A_2

$$(s+1)^3 \frac{4s^2 + 3s + 2}{(s+1)^3 (s+2)} = A_1 (s+1)^2 + A_2 (s+1) + A_3 + A_4 \frac{(s+1)^3}{(s+2)}$$

$$\frac{d}{ds} \left| \frac{4s^2 + 3s + 2}{s+2} \right| = \frac{d}{ds} \left| A_1 (s+1)^2 + A_2 (s+1) \right| + 0 + 0$$

si considerano nulli o perché sono costanti o perché $\rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$

$$\frac{4s^2 + 16s + 4}{(s+2)^2} = 2A_1 (s+1) + A_2$$

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{4s^2 + 16s + 4}{(s+2)^2} = \lim_{s \rightarrow -1} [2A_1 (s+1) + A_2] \Rightarrow A_2 = -16$$

è una costante

CALCOLO A_1

$$\frac{d^2}{ds^2} \left| \frac{4s^2 + 3s + 2}{s+2} \right| = \frac{d}{ds} \left| 2A_1 (s+1) \right| + 0$$

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{24}{(s+2)^3} = \lim_{s \rightarrow -1} 2A_1 \Rightarrow A_1 = 12$$

Altri modi di semplificazione

Sistema Lineare

Quando il numero di poli è al massimo tre è conveniente utilizzare il metodo dei sistemi lineari.

Poli Complessi

Se una funzione ha poli complessi per ognuno di essi vi sono due termini in cui al numeratore vi è il polo ed il suo coniugato.

$$F(s) = \frac{1}{[(s+1)^2+1](s+2)} = \frac{A}{s+1+j} + \frac{A^c}{s+1-j} + \frac{B}{s+2} =$$

$$= \frac{B}{s+2} + \frac{A}{s-(-1-j)} + \frac{A^c}{s-(-1+j)}$$

← in questo modo il polo è scritto in modo più corretto.

Calcolo B

$$\lim_{s \rightarrow -2} (s+2) F(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{(s+1)^2+1} = B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

Calcolo di A

$$\lim_{s \rightarrow (-1-j)} \cancel{(s+1+j)} \frac{1}{\cancel{(s+1+j)}(s+1-j)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow (-1-j)} \frac{1}{(s+1-j)(s+2)} =$$

$$= \frac{1}{(-1-j+1-j)(-1-j+2)} = \frac{1}{-2j(1-j)} = \frac{1}{-2j-2} = \frac{1}{-(2+j)} \cdot \frac{2-j}{2-j} =$$

$$= -\frac{2-j}{4+j} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}j \Rightarrow A = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}j$$

$$A^c = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}j$$

N.B. il metodo risolutivo poteva essere quello del sistema lineare considerando che

$$\frac{A(s+1-j) + A^c(s+1+j)}{(s+1)^2+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$sA + A - jA + sA^c + A_c + jA^c = s(A+A^c) + j(A^c-A) + (A+A^c) =$$

$$= \underbrace{(A+A^c)}_{a} \underbrace{(s+1)}_{b} + j \underbrace{(A^c-A)}_{c} = \underbrace{as+b}_{\text{forma generica di un numero complesso}}$$

$$(as+b)(s+2) + B(s^2+1+2s+1) = \underbrace{as^2+2as+bs+2b}_{\sim} - \underbrace{Bs^2+2Bs+2B}_{\sim} =$$

$$s^2(a-B) + s(2a+b-2B) + 2b+2B \Rightarrow \begin{cases} a-B=0 \\ 2a+b-2B=0 \\ 2b+2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=B \\ 2B+b-2B=0 \\ b+B=\frac{1}{2} \end{cases}$$